微分方程习题课

一、内容与要求

1、掌握一阶微分方程中可分离变量方程、一阶线性方程 的求解；可降阶的微分方程的求解

2、掌握线性方程解的结构；高阶常系数齐次、非齐次线性方程的求解

3、会解微分方程的综合题

例1　填空题

1、微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解形式可设为

$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

2、以$y_1=e^x\sin 2x, y_2=e^x\cos 2x$ 为解的二阶

常系数齐次线性方程为 $y''-2y'+5y=0$

3、求以$2xe^x$、$\sin 2x$为解的阶数最低的常系数齐次线性微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$

4、已知方程$(1):(x-1)y''-xy'+y=0$的一个特解$y_1=x$，

又知$\bar{y}=e^x-(x^2+x+1)$，$y^*=-x^2-1$是方程

$(2):(x-1)y''-xy'+y=f(x)$的两个解，则$f(x)=$______

方程(2)的通解为______

3、求以$2xe^x$、$\sin 2x$为解的阶数最低的常系数齐次线性微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$

解： 由题意知$r=1$是特征方程的重根, $r=\pm 2i$,是特征方程的根. 要使微分方程的阶最低, 故特征方程为

$$(r-1)^2(r-2i)(r+2i)=0$$

即 $$r^4-2r^3+5r^2-8r+4=0$$

所求微分方程为

$$y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$$

4、已知方程$(x-1)y''-xy'+y=0$的一个特解$y_1=x$,

又知$\overline{y}=e^x-(x^2+x+1)$ $y^*=-x^2-1$是方程

$(x-1)y''-xy'+y=f(x)$的两个解，求$f(x)$,并求通解.

解: 将$y^*=-x^2-1$代入，得 $f(x)=(x-1)^2$

$\because \overline{y}-y^*=e^x-x$是齐次方程的解，

由齐次方程解的叠加原 理知$y_2=e^x-x+x=e^x$

也是齐次方程的解， 且y_1,y_2线性无关，

方程的通解：$y=C_1e^x+C_2x-x^2-1$

例2 求解微分方程

1、$xydx+(x^2+1)dy=0$

2、$xy'+2y=x\ln x$，且$y(1)=-\dfrac{1}{9}$

3、$\begin{cases}(1-x^3)y''+3x^2y'=0\\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=1,\end{cases}$

4、求$y''-2y'-3y=4e^{-x}$的通解

例2 求解微分方程

1、$xydx+(x^2+1)dy=0$

解 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{x}{1+x^2}dx$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

即 $\ln|y|=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$

微分方程的通解 $y=\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$ 记$C=\pm|C_1|$

解法二 方程化为 $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=0$

通解 $y=Ce^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}=Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}=\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$

2、$xy' + 2y = x\ln x$，且$y(1) = -\frac{1}{9}$

解： 方程化为 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \ln x$

通解：$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[C + \int \ln x e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right]$

$$= \frac{c}{x^2} + \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$$

特解：$y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$

3、$\begin{cases}(1-x^3)y''+3x^2y'=0\\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=1,\end{cases}$

解： 令 $y'=p$,则方程化为：

$$p'+\frac{3x^2}{1-x^3}p=0$$

$$p=C_1'e^{-\int\frac{3x^2}{1-x^3}dx}=C_1'e^{\ln\left|1-x^3\right|}=C_1(1-x^3)$$

代入$y\big|_{x=0}=1$,得$C_1=1$ $y'=p=1-x^3$

$\Rightarrow y=x-\frac{1}{4}x^4+C_2$ 代入$y\big|_{x=0}=1$,得$C_2=1$

特解为：$y=x-\frac{1}{4}x^4+1$

4、 $y''-2y'-3y=4e^{-x}$的通解

解 特征方程 $r^2-2r-3=0,$

特征根 $r_1=-1,\ r_2=3,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x},$

$\because \lambda=-1$是单根， 设 $y^*=Axe^{-x},$

代入方程, 得 $-4A=4$ $A=-1$

于是 $y^*=-xe^{-x}$

原方程通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-xe^{-x}.$$

例3. 已知曲线c过点$A(1,0)$及$B(0,1)$，且$\overset{\frown}{AB}$为凸弧，P为曲线c上异于B的任一点，已知弧$\overset{\frown}{PB}$与弦PB所围的图形的面积为P的横坐标的立方，求此曲线在[0, 1]上的方程。

解. 设曲线：$y = f(x)$

建立微分方程：$$\int_0^x f(t)dt - \frac{[f(x)+1]x}{2} = x^3$$

求导：$$f(x) - \frac{f(x)+1}{2} - \frac{x}{2} f'(x) = 3x^2 \text{ 且 } f(1) = 0$$

求导：$$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x} - 6x \text{ 且 } y(1) = 0$$

解得$$y = f(x) = -6x^2 + 5x + 1, \qquad x \in [0,1]$$

例4. 由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标，求此曲线方程.

解. 设曲线方程为：$y = f(x)$

在(x, y)处的切线方程：$Y - y = y'(X - x)$

根据题设：$\dfrac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + y'^2}} = x$ 即：$y' - \dfrac{1}{2x} y = -\dfrac{x}{2} y^{-1}$

令$z = y^2$，解此伯努利方程得 $y^2 = x(C - x)$

注：例3,4是微分方程的几何应用题

方法：第一步：先建立微分或积分方程；

第二步：求解方程.

例5 求连续函数$f(x)$,满足$f(x)=\sin x-\int_0^x tf(x-t)dt$

解 令$x-t=u$ $\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x (x-u)f(u)du$

方程化为 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

且$f(0)=0$

两边求导 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$

即 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$ 且$f'(0)=1$

两边再求导 $f''(x)=-\sin x-f(x)$

$y=f(x)$满足初值问题$\begin{cases} y''+y=-\sin x \\ y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1 \end{cases}$

特征方程 $r^2+1=0$

特征根 $r_{,1,2}=\pm i$

对应齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

设特解为 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$

$$A=\frac{1}{2},B=0$$

$$\therefore\ y=f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

代入初始条件$y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1$得

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

注：积分方程往往隐含初始条件.

例6. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续二阶导数，且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数，

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$$

变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$,

$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解: （1）由反函数的导数公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''\frac{dx}{dy}}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y'' - y = \sin x \qquad ①$$

(2) 方程①的对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

设①的特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$, 代入①得 $A=0$,

$B = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2}\sin x$, 从而得①的通解:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

由初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{3}{2}$ 得

$$C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

故所求初值问题的解为 $y = e^{x} - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$

例7. 设非负函数$y=y(x)(x\geq 0)$满足微分方程$xy''-y'=-2$

曲线过原点，其与直线$x=1, y=0$围成的平面图形D

的面积为2,(1)求$y=y(x)$; (2)求D绕y轴旋转的旋转体的体积

解: (1) $y''-\frac{1}{x}y'=-\frac{2}{x}$ 令$p=y', p'=y''$

$$p=y'=e^{\int\frac{1}{x}dx}[C_1+\int(-\frac{2}{x})e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx]=C_1x+2$$

$$y=\frac{1}{2}C_1x^2+2x+C_2 \quad \because y(0)=0 \quad C_2=0$$

又$\int_0^1(\frac{1}{2}C_1x^2+2x)dx=2$ $\quad C_1=6$

$$y=3x^2+2x$$

$$(2)V=2\pi\int_0^1 x(3x^2+2x)dx=\frac{17\pi}{6}$$

注：柱壳法$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

另解：$x=\dfrac{\sqrt{1+3y}-1}{3}$

$$V=5\pi-\pi\int_0^5\frac{(\sqrt{1+3y}-1)^2}{9}dy$$

$$=5\pi-\frac{39\pi}{18}=\frac{17\pi}{6}$$